evropský sociální fond v ČR
podpora zaměstnanosti

Základy statistických metod

Prof. Ing. Milan Holický, DrSc., Ing. Karel Jung a
Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D.
ČVUT v Praze, Kloknerův ústav

seminář Zásady hodnocení existujících konstrukcí, Arcibiskupský seminář, 12.4.2006

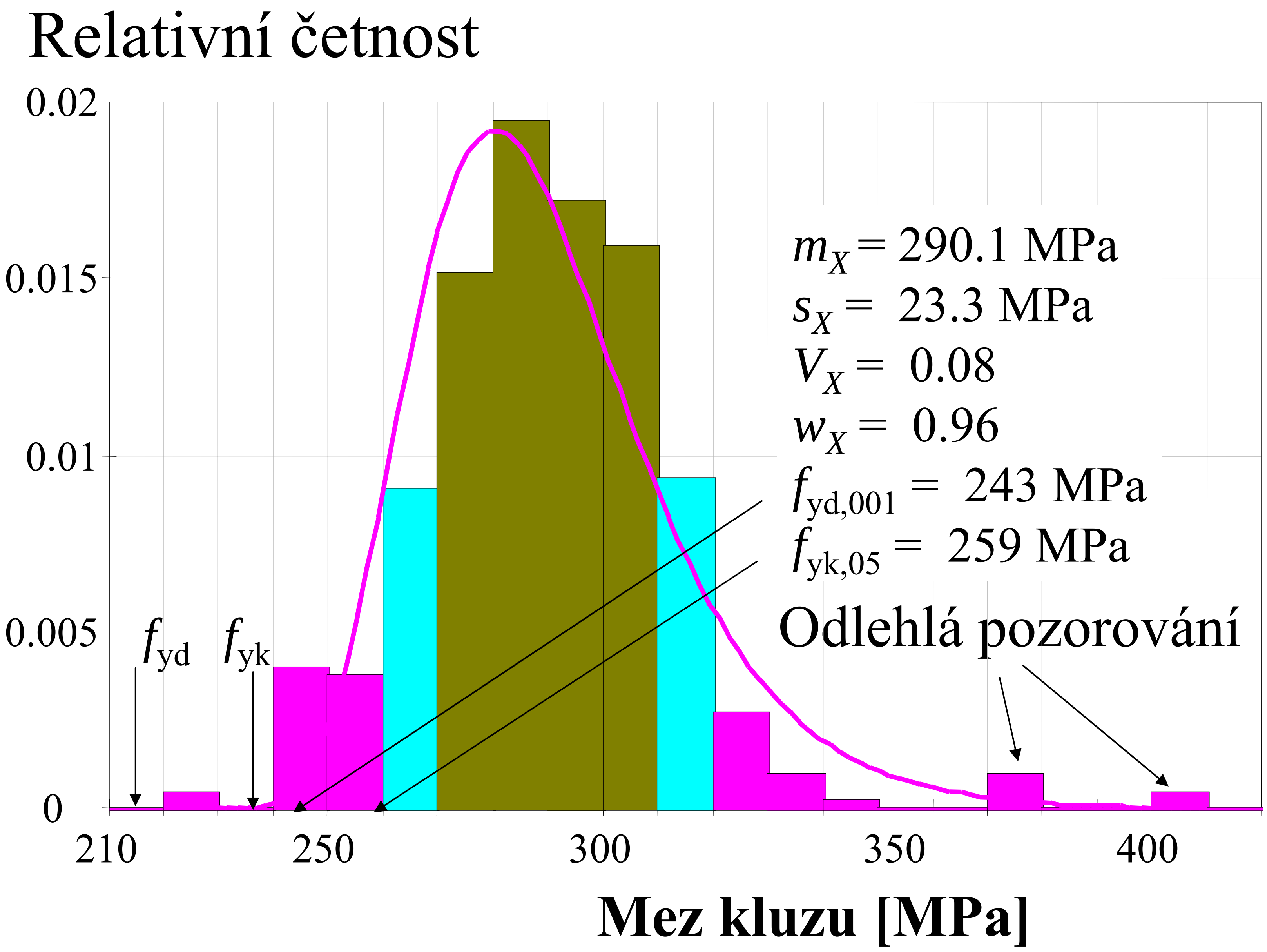
1. Úvod
2. Teoretický model náhodné veličiny
3. Odhad kvantilu náhodného výběru
4. Závěry

„Inovace metod hodnocení existujících stavebních konstrukcí"

1. ÚVOD

- hodnocení existujících konstrukcí – nedostatečné množství informací o základních veličinách (odolnosti) → statistické postupy
- při ověřování spolehlivosti náhodné veličiny X popsány charakteristickými X_k nebo návrhovými hodnotami X_d
- hodnoty X_k a X_d obvykle stanoveny jako:
  1. *p*-procentní kvantil teoretického modelu
  2. odhad *p*-procentního kvantilu z náhodného výběru
- klíčové pojmy:
  1. teoretický model
  2. náhodný výběr
  3. **kvantil**

Mez kluzu oceli S235 – 792 pozorování



2. Teoretický model náhodné veličiny

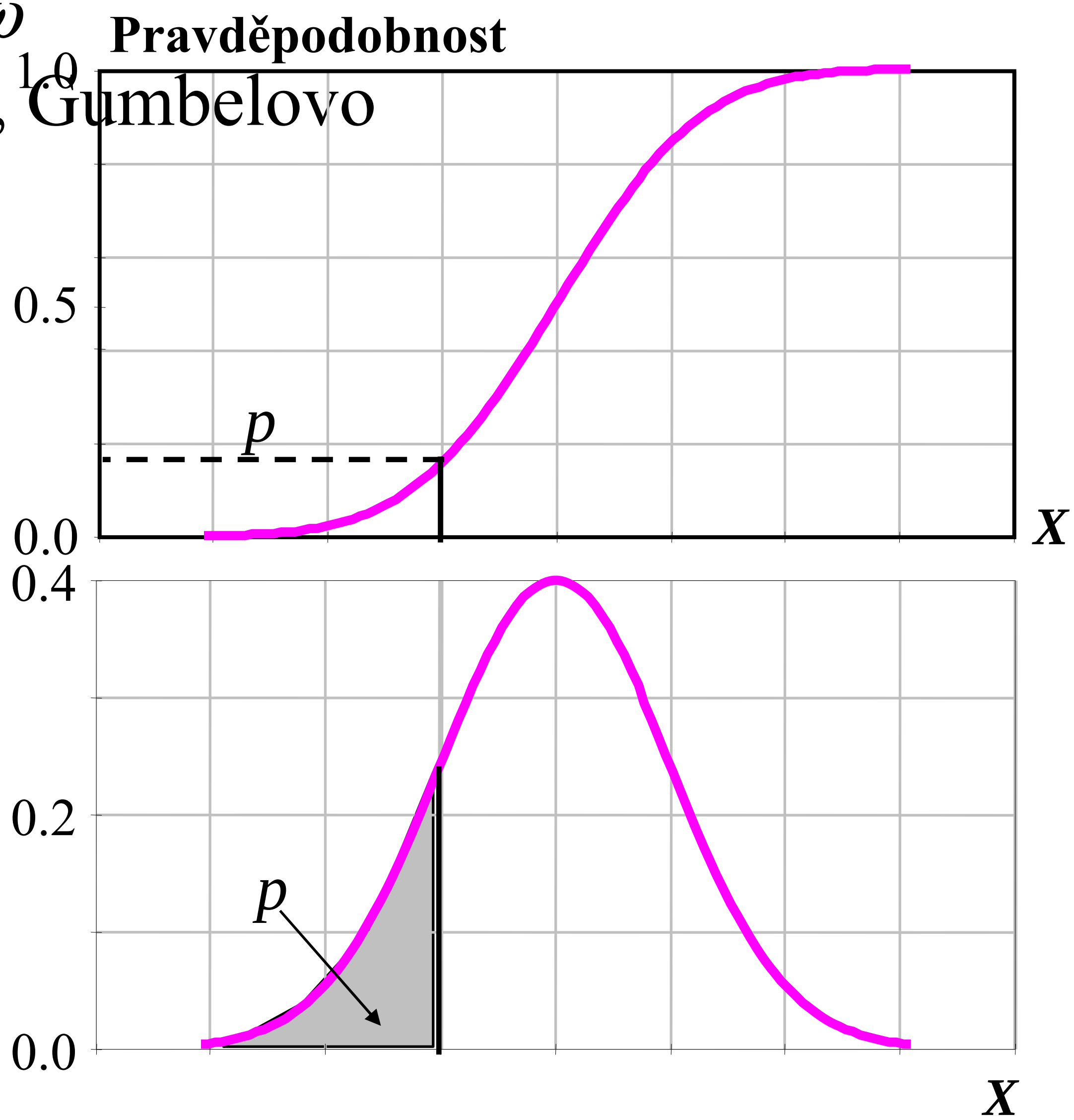
- parametry: průměr μ, směrodatná odchylka σ, variační koeficient V, šikmost ω
- normální, lognormální, Gumbelovo

$\Phi(x)$ – distribuční funkce

$$p = \mathrm{P}\{X < x\} = \Phi(x)$$

$\varphi(x)$ - hustota pravděpodobnosti

$$p = \mathrm{P}\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\mathrm{d}x$$



Kvantil teoretického modelu

TEORETICKÝ MODEL: $\varphi(x)$, $\Phi(x)$, μ, σ, ω

Kvantil x_p je taková hodnota náhodné veličiny X, pro niž platí, že výskyt hodnot menších než x_p nastane s pravděpodobností p

$$\mathrm{P}(X < x_p) = p$$

$$p = \int_{-\infty}^{x_p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(x_p)$$

pravděpodobnost p (~ 0,001; **0,05**; ~ 0,10)

Kvantil normálního rozdělení

$$x_p = \mu_X + u_p\ \sigma_X = \mu_X\ (1 + u_p\ V_X)$$

Kvantil lognormálního rozdělení

$$x_p = \frac{\mu_X}{\sqrt{1+V_X{}^2}} \exp\left(u_p \sqrt{\ln(1+V_X{}^2)} \right)$$

$$x_p \cong \mu_X\ \exp\left(u_p \times V_X\right)$$

Kvantil gumbelova rozdělení

$$x_p = x_{\mathrm{mod}} - \frac{1}{c}\ln[-\ln(p)] \cong \mu_X - \{0{,}45 + 0{,}78\ln[-\ln(p)]\}\ \sigma_X$$

3. Odhad kvantilu náhodného výběru

• náhodný výběr o rozsahu n – soubor odebraný ze základního souboru (stanovené podmínky)

• charakteristiky: průměr m, směrodatná odchylka s, variační koeficient v a šikmost w

• pokryvná metoda: $x_{p,\text{cover}}$ - konfidence γ:

$$\mathbf{P}\{x_{p,\text{cover}} < x_p\} = \gamma$$

• předpovědní metoda: $x_{p,\text{pred}}$ – pravděpodobnost p dalšího pozorování $x_{\text{n+1}}$:

$$\mathbf{P}\{x_{n+1} < x_{p,\text{pred}}\} = p$$

• Bayesovská metoda: kombinace naměřených dat (m a s) s předchozími daty (m‘,s‘) → stanovení výsledných charakteristik (m‘‘,s‘‘) → pokryvná nebo předpovědní metoda

Obecný vztah pro odhad kvantilu

- $\boldsymbol{f}_{\mathbf{k}}$= průměr - $\boldsymbol{k_p}$ × směrodatná odchylka
- teoretický model: $f_{\mathrm{k}} = \mu_X - u_p\, \sigma_X$
- výběr: $f_{\mathrm{k}} = m_X - k_p\, s_X$ nebo $f_{\mathrm{k}} = m_X - \kappa_p\, \sigma_X$
- $k_{\mathrm{p}}(\kappa_{\mathrm{p}})$ – koeficient předpovědní/pokryvné metody závislý na:
  - pravděpodobnosti p
  - rozsahu výběru n
  - konfidenci γ
  - šikmosti ω
  - předchozích informacích (Bayesovská metoda)

Odhad kvantilů podle Eurokódů

- předpovědní metoda pro normální rozdělení
- kvantily pro p = 0,05; 0,001 a 0,1

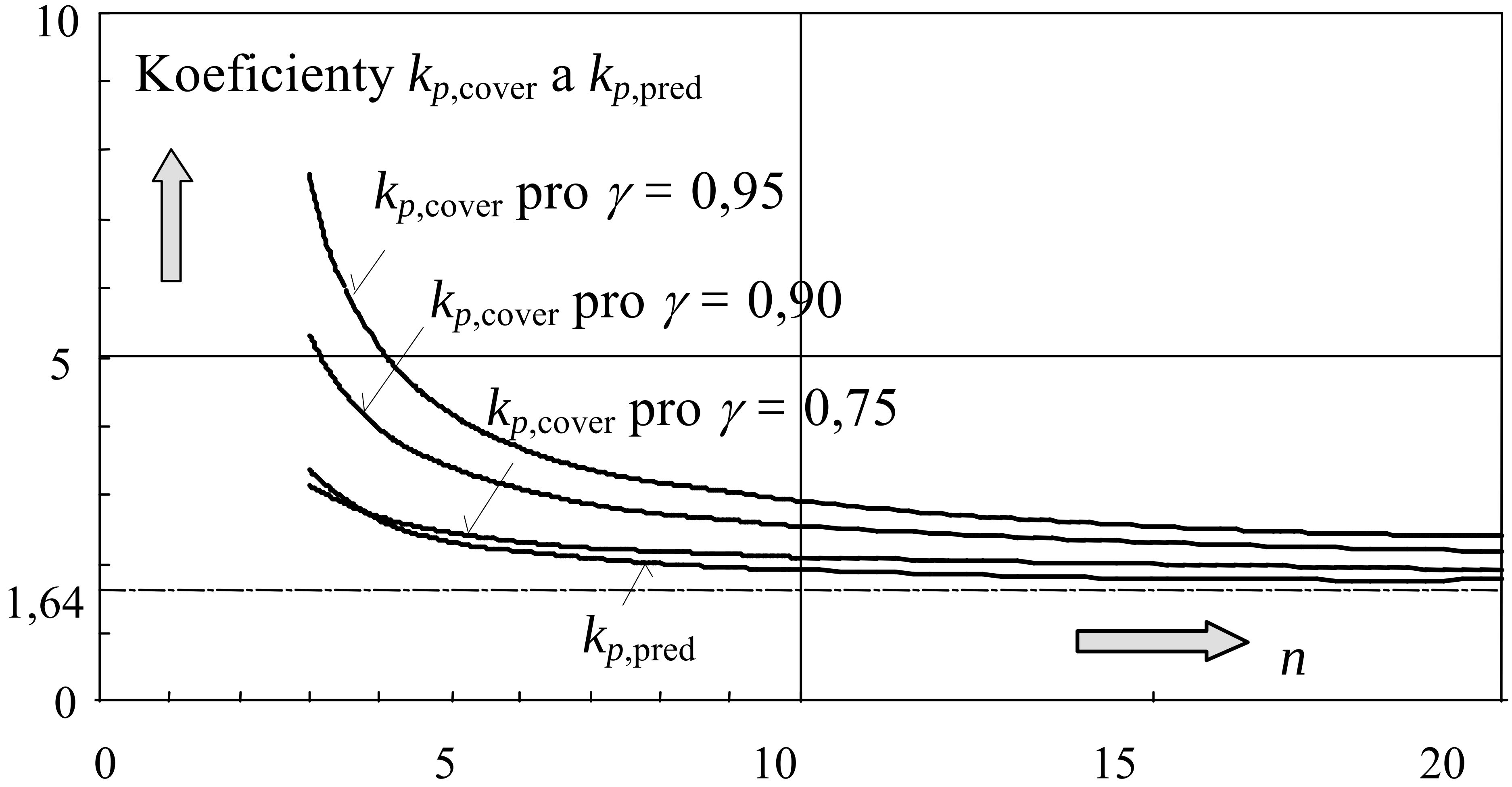
Součinitele k_n pro 5% charakteristickou hodnotu.

Součinitel	Rozsah souboru n										
	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$- u_p(1/n+1)^{1/2}$, σ známé	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
$- t_p(1/n+1)^{1/2}$, σ neznámé	-	-	3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Součinitele k_n pro návrhovou hodnotu x_d dominantní veličiny, $P(X < x_d) = 0,001$.

Součinitel	Rozsah souboru n										
	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$- u_p(1/n+1)^{1/2}$, σ známé	4,36	3,77	3,56	3,44	3,37	3,33	3,27	3,23	3,16	3,13	3,09
$- t_p(1/n+1)^{1/2}$, σ neznámé	-	-	-	11,4	7,85	6,36	5,07	4,51	3,64	3,44	3,09

Vliv konfidence γ



Odhad předpovědní metodou odpovídá odhadu pokryvnou metodou pro konfidenci $\gamma = 0{,}75$.

Příklad odhadu kvantilu

BETON: n = 5, m = 29,2 MPa, s = 4,6 MPa

$x_{0,05}$ [MPa] pro

šikmost ω =	0,0	+1,0
γ = 0,75	17,9	20,2
γ = 0,95	9,9	14,6

ZÁVĚRY

- hodnocení existujících stavebních konstrukcí se střetává s nedostatečným množstvím informací (odolnosti materiálů)
- odhad kvantilu náhodného výběru lze stanovit pokryvnou, předpovědní nebo Bayesovskou metodou (zjednodušená operativní metoda v EN 1990)
- odhad kvantilu (charakter. pevnosti) se může pohybovat v širokém rozmezí v závislosti na:
  - použité metodě
  - požadované konfidenci γ u pokryvné metody
  - znalosti směrodatné odchylky σ_X základního souboru
  - předchozích informacích o základním souboru (Bayesovská metoda)

Děkuji za pozornost.

Prof. Ing. Milan Holický, DrSc., Ing. Karel Jung a
Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D.

ZÁKLADY STATISTICKÝCH METOD