

STATISTICKÉ HODNOCENÍ ZKOUŠEK MATERIÁLOVÝCH VLASTNOSTÍ

Prof. Ing. Milan Holický, PhD., DrSc., Ing. Karel Jung, Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D.
České vysoké učení technické v Praze, Kloknerův ústav, Šolínova 7, 166 08 Praha 6
Tel. 2 2435 3850, e-mail: jung@klok.cvut.cz
Web: www.cvut.cz

Anotace:

Využití zkoušek je důležitou součástí ověřování spolehlivosti existujících železobetonových konstrukcí. Při odhadu charakteristické hodnoty materiálových vlastností se uplatní statistické metody uvedené v příloze D normy ČSN EN 1990 a také v novém evropském dokumentu EN 13791. Postupy podle obou dokumentů se však navzájem liší a mohou vést k rozdílným odhadům charakteristické hodnoty. Empirické vztahy uvedené v předpisu EN 13791 zpravidla vedou k vyšším hodnotám charakteristické pevnosti.

1. Úvod

Využití zkoušek je důležitou součástí ověřování spolehlivosti existujících železobetonových konstrukcí, u kterých jsou často velmi významné nejistoty o vlastnostech materiálů. Statistické metody se uplatní především při odhadu charakteristické hodnoty pevnosti betonu, v některých případech se mohou použít také při přímém odhadu návrhové hodnoty. Obecné postupy hodnocení a navrhování konstrukcí z libovolného materiálu na základě zkoušek uvádí příloha D normy ČSN EN 1990 [1], která je v souladu s dokumenty ČSN ISO 13822 [3], ISO 12491 [4] i ISO 2394 [5].

Postupy pro stanovení charakteristické hodnoty pevnosti betonu v konstrukcích na základě zkoušek uvádí nový evropský dokument EN 13791 [2], který navazuje na ČSN EN 206-1 [6] pro specifikaci vlastností betonu na základě zkoušek (kontrola shody). Postupy podle ČSN EN 1990 [1] a EN 13791 [2] se však navzájem liší a mohou vést k rozdílným odhadům charakteristické hodnoty. Empirické vztahy uvedené v novém předpisu EN 13791 [2] vedou zpravidla k vyšším hodnotám charakteristické pevnosti a jsou tedy na nebezpečné straně.

2. Obecné zásady statistického hodnocení

Při hodnocení výsledků zkoušek se má porovnat chování zkušebních vzorků a způsoby porušení s teoretickými předpoklady. Případnou významnou odchylku od předpokladů je potřebné vysvětlit např. prostřednictvím doplňujících zkoušek nebo změnou teoretického modelu.

Podle přílohy D normy ČSN EN 1990 [1] se výsledky zkoušek mají hodnotit na základě statistických metod s využitím dostupných znalostí o typu rozdělení a jeho příslušných parametrech. Metody uvedené v příloze D se mají použít pouze při splnění následujících podmínek:

- statistické údaje (včetně apriorních informací) jsou převzaty ze známých základních souborů, které jsou dostatečně homogenní, a
- je k dispozici dostatečný počet pozorování.

Rozlišují se tři hlavní kategorie hodnocení výsledků zkoušek:

- pokud se provádí pouze jedna zkouška (nebo velmi málo zkoušek), není možné klasické statistické hodnocení. Za předpokladu, že se použijí rozsáhlé apriorní informace spojené s hypotézou o relativních stupních důležitosti těchto informací a výsledků zkoušek, lze hodnocení pojmout jako statistické (hodnocení s využitím tzv. Bayesovských postupů je popsáno např. v dokumentu ISO 12491 [4], materiálech JCSS [7] a nebo v příručce [8]),
- pokud se pro odhad vlastnosti provádí řada zkoušek, je možné klasické statistické hodnocení. Pro běžné případy uvádí příloha D ČSN EN 1990 [1] příklady. I v tomto postupu je však možné využít apriorní (předchozí) informace o vlastnosti, v běžných případech to však bude méně potřebné než ve výše uvedeném případě,
- pokud se z důvodu kalibrace modelu a s ním spojeným jedním nebo více parametry provádí řada zkoušek, je možné klasické statistické hodnocení.

Výsledek hodnocení zkoušky se má považovat za platný pouze pro charakteristiky zatížení uvažované při zkouškách. Pokud se výsledky extrapolují tak, aby se pokryly další návrhové parametry a zatížení, mají se použít doplňující informace z předchozích zkoušek nebo informace založené na teoretickém podkladě.

3. Stanovení charakteristické hodnoty pevnosti betonu podle ČSN EN 1990

Příloha D ČSN EN 1990 [1] poskytuje obecné pokyny pro hodnocení jedné nezávislé vlastnosti X , která může představovat:

- odolnost výrobku,
- vlastnost, která přispívá k odolnosti výrobku.

Další text se omezuje na důležitou praktickou úlohu, kdy vyšetřovanou materiálovou vlastností X je pevnost betonu v tlaku f_c . Má se stanovit její charakteristická hodnota definovaná jako 5% kvantil. Uvažuje se, že základní soubor má normální rozdělení. Poznamenejme, že kvantil náhodné veličiny se podrobně popisuje v příručce [8] nebo ve skriptech [9].

Vztahy uvedené v příloze D ČSN EN 1990 [1] vycházejí z předpokladu, že vyšetřovaná veličina má normální nebo lognormální rozdělení. Přijetí lognormálního rozdělení, viz např. příručku [8] nebo skripta [9], má tu výhodu, že na rozdíl od normálního rozdělení se vyloučí výskyt záporných hodnot. Dále se předpokládá, že neexistuje apriorní znalost průměru pevnosti f_c . Průměr se stanoví z výsledků zkoušek podle vztahu:

$$f_{m(n),is} = \frac{1}{n} \sum_n f_{is,i} \quad (1)$$

kde $f_{m(n),is}$ je výběrový průměr odhadnutý z výsledků zkoušek $f_{is,i}$ a sumace se provádí přes výsledky všech n zkoušek. Poznamenejme, že v příspěvku se používají symboly, značky a zkratky definované v EN 13791 [2].

Rozlišují se dva případy:

- případ „ V neznámý“, kdy neexistuje apriorní znalost variačního koeficientu pevnosti betonu,
- případ „ V známý“, kdy je variační koeficient znám.

V případě „ V neznámý“ se variační koeficient vlastnosti odhadne výběrovým variačním koeficientem:

$$V = s / f_{m(n),is} \quad (2)$$

kde s je výběrová směrodatná odchylka stanovená z výsledků zkoušek:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_n (f_{is,i} - f_{m(n),is})^2} \quad (3)$$

Poznamenejme, že často může být výhodnější použít případ „ V známý“ spolu s konzervativním horním odhadem V , než aplikovat pravidla uvedená pro případ „ V neznámý“. Pokud je V neznámý a odhaduje se výběrovým variačním koeficientem, nemá se uvažovat menší než 0,10.

V souladu s přílohou D normy ČSN EN 1990 [1] (viz ale také příručku [10] nebo dokumenty ISO 12491 [4] a ISO 2394 [5]) může být charakteristická hodnota pevnosti betonu v tlaku $f_{ck,is}$ stanovená z výsledků n zkoušek předpovědní metodou:

$$f_{ck,is} = f_{m(n),is} (1 - k_n \times V) \quad (4)$$

kde k_n označuje součinitel z tabulky Tab. 1 závislý na počtu zkoušek n , pravděpodobnosti p , které odpovídá hledaný kvantil, a obecně také na šikmosti základního souboru α (pro normální rozdělení je však $\alpha = 0$).

Tab. 1. Hodnoty součinitele k_n pro 5% kvantil.

n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
V známý	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
V neznámý	–	–	3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Poznamenejme, že zatímco norma ISO 12491 [4] označuje postup podle vztahu (4) s uvážením součinitelů k_n v Tab. 1 jako předpovědní metodu, ČSN EN 1990 [1] používá termín “Bayesovský postup s vágním apriorním rozdělením”. Charakteristická hodnota $f_{ck,is}$ daná vztahem (4) může být podle ČSN EN 1990 [1] dále ovlivněna návrhovou hodnotou převodního součinitele η_d , který se použije např. pro převod pevnosti získané z jádrových vývrtů na pevnost z normových těles. V předložené studii se součinitel pro zjednodušení neuvažuje.

Koeficient k_n uvedený v Tab. 1 pro známý variační koeficient V se určí ze vztahu:

$$k_n = -u_{0,05} (1 + 1/n)^{0,5} \quad (5)$$

kde $u_{0,05}$ je kvantil normované normální veličiny odpovídající pravděpodobnosti 0,05.

V případě, že variační koeficient V je neznámý, použije se výběrový variační koeficient (2) a součinitel k_n se stanoví v souladu s ISO 12491 [4] jako:

$$k_n = -t_{0,05} (1 + 1/n)^{0,5} \quad (6)$$

kde $t_{0,05}$ je kvantil Studentova t -rozdělení odpovídající pravděpodobnosti 0,05. Studentovo t -rozdělení je popsáno např. ve skriptech [11].

V příručce [10] se ukazuje, že předpovědní metoda v ČSN EN 1990 [1] odpovídá přibližně pokryvné metodě s konfidencí 0,75 popsané v ISO 12491 [4]. Poznamenejme, že vztahy (5) a

(6) lze použít i při odhadu kvantilů odpovídajícím pravděpodobnostem různým než 0,05, např. pravděpodobnosti 0,001 u návrhové hodnoty materiálových vlastností.

Je potřebné zdůraznit, že při hodnocení existujících konstrukcí se obvykle předpokládá statistická nezávislost výsledků zkoušek. Poznamenejme, že v případě kontroly shody při výrobě betonu popisované v ČSN EN 206-1 [6] se může při hodnocení uvažovat statistická závislost mezi výsledky po sobě jdoucích zkoušek, jak je naznačeno např. v publikacích [12,13].

4. Odhad charakteristické pevnosti podle EN 13791

Nový dokument EN 13791 [2] uvádí postupy pro hodnocení pevnosti betonu v konstrukcích. Rozlišuje postup pro 15 a více zkoušek (postup A) a pro 3 až 14 zkoušek (postup B).

Postup A

Podle postupu A se charakteristická pevnost betonu v konstrukci $f_{ck,is}$ stanoví jako menší z hodnot vyplývajících z následujících vztahů:

$$f_{ck,is} = f_{m(n),is} - k_2 \times s, \quad f_{ck,is} = f_{is,nejmenší} + 4 \text{ MPa} \quad (7)$$

kde k_2 je koeficient podle národní přílohy EN 13791 [2] (pokud není stanoven, uvažuje se $k_2 = 1,48$) a $f_{is,nejmenší}$ je minimální hodnota získaná ze zkoušek. Výběrová směrodatná odchylka s nemá být menší než 2 MPa.

Postup B

V případě 3 až 14 zkoušek se charakteristická hodnota pevnosti $f_{ck,is}$ stanoví jako menší hodnota získaná ze vztahů:

$$f_{ck,is} = f_{m(n),is} - k, \quad f_{ck,is} = f_{is,nejmenší} + 4 \text{ MPa} \quad (8)$$

kde k je součinitel uvedený v Tab. 2 pro tři intervaly počtu zkoušek n . Nespojitosť součinitele k vede k nespojitosti odhadu charakteristické pevnosti $f_{ck,is}$ v závislosti na n .

Tab. 2. Součinitel k v MPa v závislosti na počtu zkoušek n .

n	k
10 až 14	5
7 až 9	6
3 až 6	7

Postupy A a B z EN 13791 [2] pro stanovení charakteristické pevnosti betonu v konstrukcích jsou obdobné jako postupy přijaté v normě ČSN EN 206-1 [6], která se však zaměřuje na odlišnou úlohu – kontrolu shody při výrobě betonu. Je patrné, že postupy A a B z EN 13791 [2] se liší od obecných postupů v ČSN EN 1990 [1] platné pro libovolný materiál. Následující rozbor je zaměřen na porovnání obou postupů a naznačení možných rozdílů, které mohou být významné v praktických aplikacích.

5. Porovnání postupů v EN 13791 a ČSN EN 1990

Postup A

Pro $n = 15$ a neznámý variační koeficient (směrodatnou odchylku) lze postupy podle EN 13791 [2] (postup A) a ČSN EN 1990 [1] zjednodušeně porovnat za předpokladu, že ve vztahu (7) rozhoduje první rovnice. Očekávaný rozdíl mezi charakteristickými hodnotami $E(\Delta f_{ck,is})$ se získá ze vztahu:

$$E(\Delta f_{ck,is}) = f_{ck,is(7)} - f_{ck,is(4)} = (-1,48 + k_n) \times E(s) = (-1,48 + k_n) \times c \times \sigma \quad (9)$$

kde $E(s)$ značí očekávanou hodnotu výběrové směrodatné odchylky, σ je směrodatná odchylka základního souboru a konstanta c (označovaná v odborné literatuře někdy jako c_4) je stanovena podle příručky [14]:

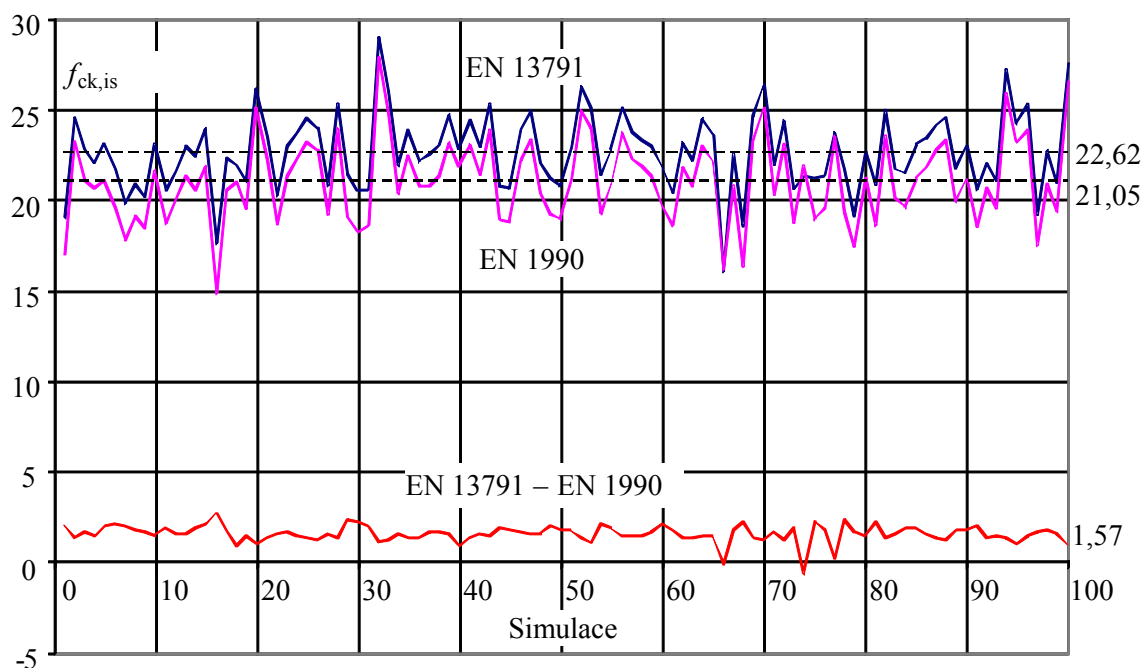
$$c = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad (10)$$

kde $\Gamma(\cdot)$ je gama funkce.

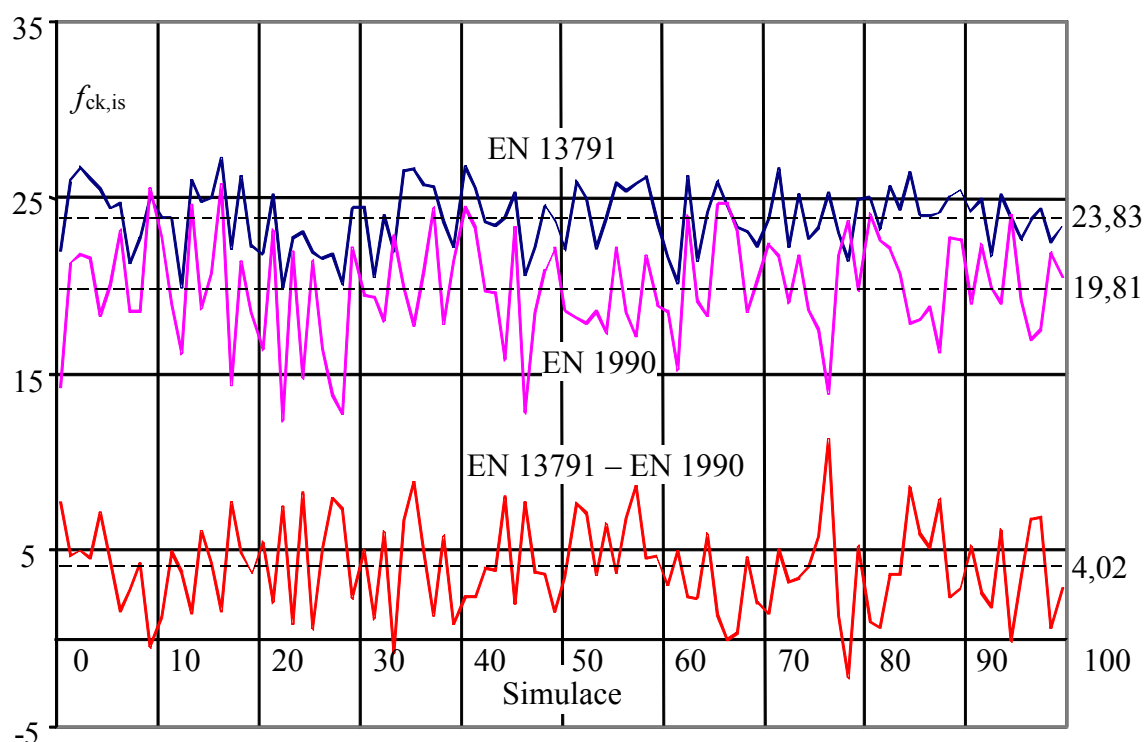
Pro odhad podle ČSN EN 1990 [1] s využitím vztahu (4) se součinitel k_n stanoví z tabulky Tab. 1 nebo ze vztahu (6). Pro 15 zkoušek platí $k_n = 1,82$. V případě, že je směrodatná odchylka souboru $\sigma = 5$ MPa, pak rozdíl podle vztahu (9) vychází $E(\Delta f_{ck,is}) = 1,67$ MPa. S pravděpodobností přibližně 0,085 však rozhoduje druhý vztah (7), a proto je průměrný rozdíl poněkud nižší než předpokládaná hodnota, $E(\Delta f_{ck,is}) \approx 1,6$ MPa.

Ověření prostřednictvím simulací výsledků zkoušek naznačuje Obr. 1. Předpokládá se, že základní soubor pevnosti betonu v tlaku má normální rozdělení s průměrem 30 MPa a směrodatnou odchylkou 5 MPa (běžné charakteristiky podle dokumentu JCSS [7]). Provádí se celkem 100 simulací souborů zkoušek – každý soubor se skládá z 15 nezávislých hodnot výsledků zkoušek.

Obr. 1 naznačuje, že pro $n = 15$ jsou charakteristické hodnoty stanovené podle EN 13791 [2] větší přibližně o 1,5 MPa a mají poněkud větší rozptyl než hodnoty podle ČSN EN 1990 [1]. Přibližně s pravděpodobností 0,016 je charakteristická hodnota stanovená podle EN 13791 [2] menší než hodnota podle ČSN EN 1990 [2] (simulace číslo 67 a 73 – případy, kdy ve vztahu (7) rozhoduje druhá rovnice). Pro větší počet zkoušek, $n > 15$, se rozdíl mezi charakteristickými pevnostmi $E(\Delta f_{ck,is})$ snižuje. Pro vysoké hodnoty n (přibližně pro $n > 70$) nabývá očekávaný rozdíl $E(\Delta f_{ck,is})$ záporných hodnot, protože ve vztahu (7) rozhoduje druhá rovnice již s pravděpodobností 0,55. Takový počet zkoušek ovšem není v praktických aplikacích obvyklý.



Obr. 1. Charakteristické pevnosti betonu podle EN 13791 [2] a ČSN EN 1990 [1] v MPa pro $n = 15$ (průměr základního souboru 30 MPa, směrodatná odchylka 5 MPa).



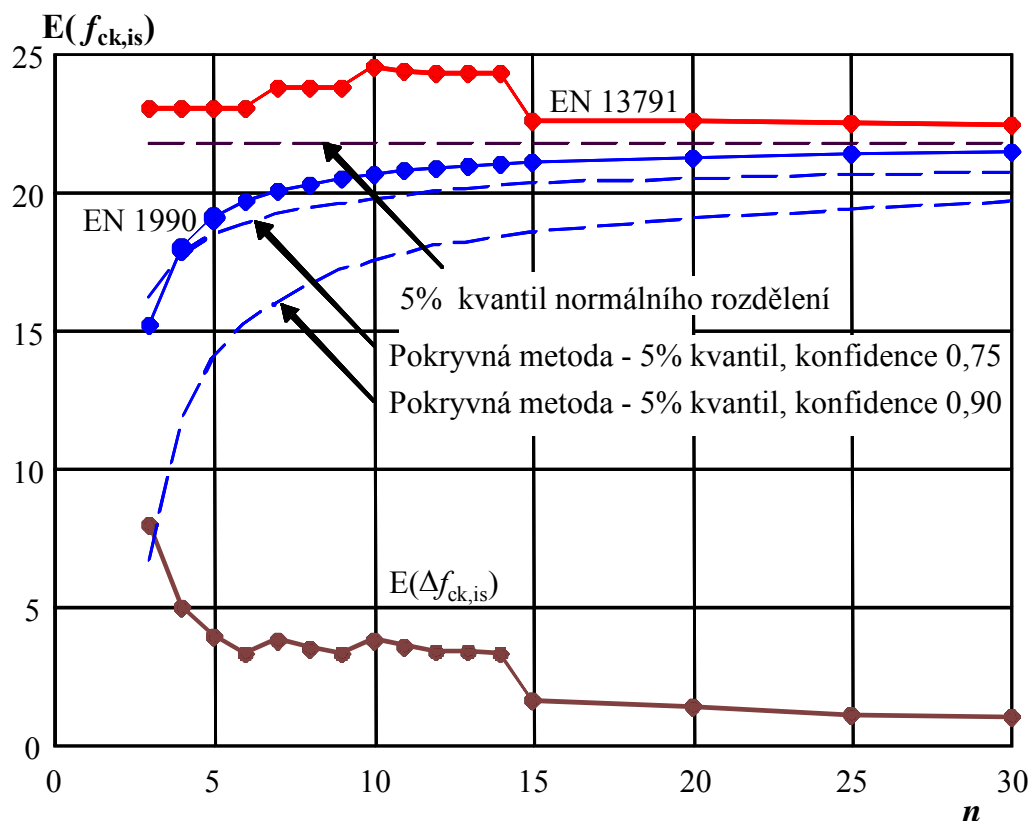
Obr. 2. Charakteristické pevnosti betonu podle EN 13791 [2] a ČSN EN 1990 [1] v MPa pro $n = 7$ (průměr základního souboru 30 MPa, směrodatná odchylka 5 MPa).

Postup B

Porovnání postupu B podle EN 13791 [2] a postupu podle ČSN EN 1990 [1] je provedeno s využitím simulačních metod. Předpokládá se opět beton s průměrnou pevností 30 MPa a

směrodatnou odchylkou 5 MPa. Provádí se celkem 100 simulací souborů zkoušek – každý soubor se v tomto případě skládá ze 7 nezávislých hodnot výsledků zkoušek, $n = 7$. Obr. 2 ukazuje výsledky simulací. Očekávaný rozdíl charakteristických hodnot je přibližně $E(\Delta f_{ck,is}) \approx 4$ MPa. To je hodnota více než dvakrát větší než při použití postupu A pro $n = 15$. Přibližně s pravděpodobností 0,080 je charakteristická hodnota pevnosti určená pomocí EN 13791 [2] opět menší než hodnota podle ČSN EN 1990 [1].

Očekávaný rozdíl charakteristických hodnot pevností podle EN 13791 [2] a ČSN EN 1990 [1] v závislosti na počtu zkoušek n uvádí Obr. 3. Pro každé n se provádí 1000 simulací souborů výsledků zkoušek pevnosti betonu s průměrem 30 MPa a směrodatnou odchylkou 5 MPa.



Obr. 3. Charakteristické pevnosti betonu v MPa v závislosti na počtu zkoušek n (průměr základního souboru 30 MPa, směrodatná odchylka 5 MPa).

Obr. 3 ukazuje, že charakteristická pevnost podle EN 13791 [2] je pro uvedené počty zkoušek n větší než hodnoty podle ČSN EN 1990 [1]. Navíc je větší než 5% kvantil normálního rozdělení (základního souboru) 21,78 MPa naznačený na Obr. 3 čárkovanou vodorovnou čarou. Pro $n < 15$ je patrná nespojitost očekávaných charakteristických pevností stanovených podle EN 13791 [2]. Při snížení počtu zkoušek z $n = 15$ na $n = 14$ se charakteristická pevnost podle EN 13791 [2] zvýší v průměru o 3 MPa. Tento alarmující a nelogický nárůst pevnosti je způsoben nespojitostí charakteristických hodnot podle postupů A a B v EN 13791 [2], jak vyplývá ze vztahů (7) a (8) a z Tab. 2 (stupňovitá závislost součinitele k na počtu zkoušek n). Pro velmi malý počet zkoušek $n = 3, 4$ a 5 narůstá očekávaný rozdíl $E(\Delta f_{ck,is})$ až na téměř 8 MPa.

Obr. 3 také ukazuje, že pro $n > 4$ jsou charakteristické hodnoty podle předpovědní metody poněkud vyšší než hodnoty stanovené pokryvnou metodou s konfidencí 0,75 (viz např. dokumenty ISO 12491 [4] a ISO 3207 [15]). Konfidence předpovědní metody tedy pro $n > 4$

klesá pod 0,75. Pokryvná metoda s konfidencí 0,90 vede k významně konzervativnějším odhadům. Poznamenejme, že konfidence 0,75 se doporučuje pro běžné stavby, zatímco konfidence 0,90 nebo 0,95 se často uvažuje pro významné stavby, jak uvádí článek [16].

6. Závěrečné poznámky

Při ověřování spolehlivosti existujících železobetonových konstrukcí se při odhadu charakteristické hodnoty pevnosti betonu obvykle uplatňují statistické metody. Nový dokument EN 13791 [2] uvádí postup odhadu charakteristické hodnoty pevnosti betonu v konstrukcích pro normální rozdělení za předpokladu apriorně neznámého variačního koeficientu. Tento postup se však liší od postupů doporučených v ČSN EN 1990 [1] pro navrhování konstrukcí z libovolného materiálu na základě zkoušek.

Numerická studie pro základní soubor s normálním rozdělením o průměru 30 MPa a směrodatné odchylce 5 MPa naznačuje, že charakteristické hodnoty stanovené podle EN 13791 [2] jsou významně větší než hodnoty stanovené podle zásad ČSN EN 1990 [1] (pro počet zkoušek mezi 6 až 14 o přibližně 3 MPa). S klesajícím počtem zkoušek roste rozdíl mezi oběma postupy až na 8 MPa. Postup doporučený v EN 13791 [2] vede navíc k nespojitým hodnotám charakteristických pevností v závislosti na počtu zkoušek.

Ukazuje se, že je nutné provést sjednocení postupů daných v EN 13791 [2] s postupy materiálově nezávislého dokumentu ČSN EN 1990 [1]. V případě hodnocení existujících konstrukcí se doporučuje použití postupů doporučených v ČSN EN 1990 [1].

Poděkování

Příspěvek byl vypracován v rámci řešení projektu Inovace metod hodnocení existujících stavebních konstrukcí CZ.04.3.07/4.2.01.1/0005 (www.konstrukce.cvut.cz) podporovaného Evropským sociálním fondem v ČR a státním rozpočtem ČR.

Literatura

- [1] ČSN EN 1990 Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí. ČNI, 2004.
- [2] EN 13791 Assessment of in-situ compressive strength in structures and precast concrete components. CEN, 2007.
- [3] ČSN ISO 13822 Zásady navrhování konstrukcí – Hodnocení existujících konstrukcí. ČNI, 2005.
- [4] ISO 12491 Statistical methods for durability control of building materials a components. ISO, 1997.
- [5] ISO 2394 General principles on reliability for structures. ISO, 1998. Zavedená v ČR jako ČSN ISO 2394 Obecné zásady spolehlivosti konstrukcí, ČNI, 2003
- [6] ČSN EN 206-1 Beton – Část 1: Specifikace, vlastnosti, výroba a shoda. ČNI, 2001.
- [7] Probabilistic Model Code. JCSS, 2001. <<http://www.jcss.ethz.ch/>>.
- [8] HOLICKÝ, M. et al. Příručka pro hodnocení existujících konstrukcí. Nakladatelství ČVUT v Praze, listopad 2007. <<http://www.konstrukce.cvut.cz>>.
- [9] HOLICKÝ, M. – MARKOVÁ, J. Základy teorie spolehlivosti a hodnocení rizik. ČVUT v Praze, 2005.

- [10] GULVANESEAN, H. – HOLICKÝ, M. *Designers' Handbook to Eurocode 1*. London: Thomas Telford, 1996.
- [11] VORLÍČEK, M. – HOLICKÝ, M. – ŠPAČKOVÁ, M. *Pravděpodobnost a matematická statistika pro inženýry*. ČVUT v Praze, 1984.
- [12] TAERWE, L. The Influence of Autocorrelation on OC-lines of Compliance Criteria for Concrete Strength. *Materials a Structures*, 1987, roč. 20, s. 418-427.
- [13] TAERWE, L. Serial Correlation in Concrete Strength Records. In *Special Publication ACI SP-104, Lewis H. Tuthill International Symposium on Concrete a Concrete Construction*. Detroit, 1987, s. 223-240.
- [14] WADSWORTH, H.M. (jr.). *Handbook of statistical methods for engineers and scientists* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill, 1998.
- [15] *ISO 3207 Statistical interpretation of data – Determination of a statistical tolerance interval*. ISO, 1975.
- [16] HOLICKÝ, M. – VORLÍČEK, M. Distribution Asymmetry in Structural Reliability. *Acta Polytechnica*, 1995, roč. 35, čís. 3, s. 75 - 85.